Creación de modelos matemáticos para representar los acordes musicales mediante ondas sinusoidales

Introducción

A La introducción incluye unas bases o fundamentos.

Partiendo de la palabra-estímulo "Armonía", decidí estudiar la propagación de las ondas de sonido en el campo de la música. Como músico entusiasta que yo mismo soy, sentía curiosidad por comprender en más detalle de qué modo emiten sonidos los instrumentos electrónicos. El sonido viaja como una onda transversal, así que básicamente adopta la misma forma que una onda sinusoidal en matemáticas. Los instrumentos electrónicos utilizan estas ondas para generar sonidos de distintas frecuencias, volumen y timbre.

C Interés personal en el tema, aunque limitado.

En la mayoría de instrumentos electrónicos se emplean osciladores[1] para producir ondas de sonido. Estas ondas de sonido son ondas sinusoidales: cambiando la frecuencia varía el tono de la nota, y cambiando la amplitud varía el volumen de la nota. El timbre del sonido se modifica una vez que la onda ha salido del oscilador. La onda viaja a través de varios filtros que van modificando el tipo de sonido. Esto permite obtener una amplia gama de sonidos capaces de imitar distintos instrumentos. Esta tecnología es la que se utiliza en los teclados electrónicos.

He decidido centrarme en la variación de frecuencia como modo de generar distintas notas. Al crear un modelo matemático basado en ondas sinusoidales para representar acordes y series de notas, puedo demostrar cómo viajan las ondas de sonido a través del aire y cómo están relacionadas entre sí las distintas ondas de frecuencia en los diversos acordes. En concreto, voy a estudiar las relaciones que existen dentro de cada tipo de acorde y si existe alguna diferencia entre aquellos acordes que, cuando uno los oye, suenan en armonía y aquellos que se perciben como discordantes.

A El objetivo general no está claro en comparación con lo que se hace.

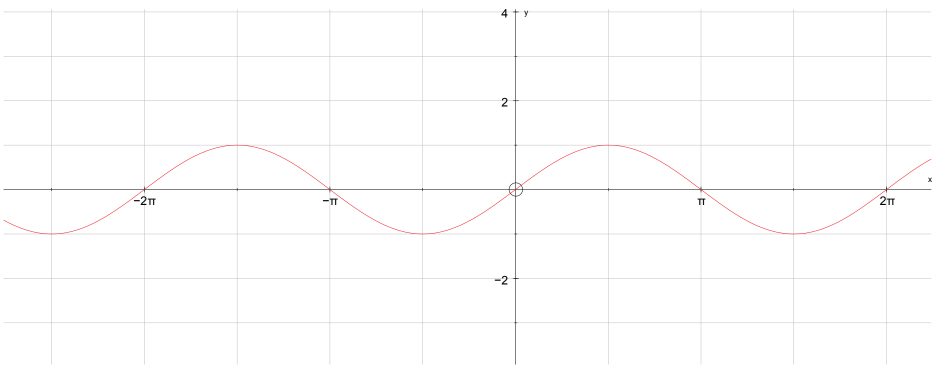
Investigación

Empecé por investigar cómo podía crear un modelo matemático para representar una única nota. Decidí utilizar la nota LA central por tener una frecuencia exacta de 440 Hz[2], y por ser la nota que utilizan las orquestas occidentales para afinar. Quería que la onda de sonido de esta nota fuese igual a una onda sinusoidal. Para ello, había que hacer que 220 Hz fuesen equivalentes a π. Esto da lugar al siguiente gráfico:

A Término no definido que no queda claro para quienes no son músicos.

Error de tipografía.

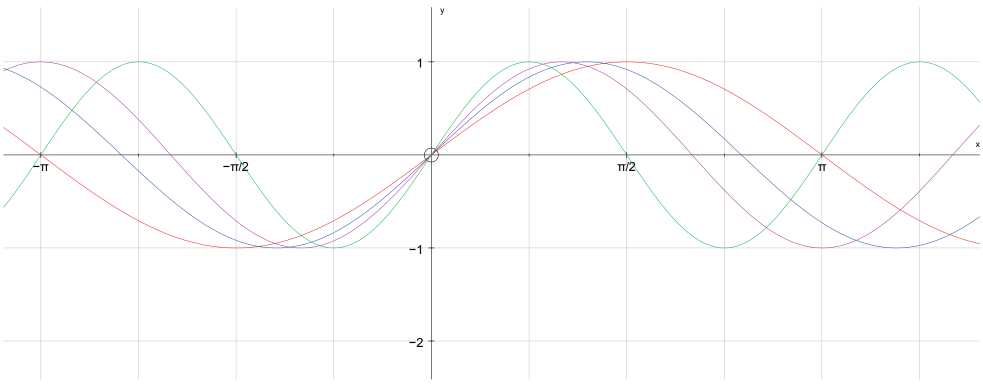
[1] http://es.wikipedia.org/wiki/Sintetizador
[2] http://www.phy.mtu.edu/~suits/notefreqs.html



1. El acorde mayor

A *No queda claro para quienes no son músicos.*

Utilizando el acorde de LA mayor, puedo estudiar la relación que existe entre las notas de un acorde mayor. El siguiente gráfico demuestra cómo viaja este acorde por el aire:



Ecuación 1: y = sen(x)
Ecuación 2: y = sen(554,37/440 x)
Ecuación 3: y = sen(659,26/440 x)
Ecuación 4: y=sen(2x)

A *No hay una explicación matemática de cómo se determinan estas.*

B *Notación incorrecta. Significa* $\frac{554.37}{440x}$ *pero debería ser* $\frac{554.37x}{440}$.

He cambiado la longitud de onda (es decir, la frecuencia) de los gráficos, modificando el coeficiente que acompaña a *x*. Para que el gráfico resultante fuese lo más exacto posible he utilizado las frecuencias originales de las otras notas[3]. La siguiente tabla contiene información adicional sobre las notas de este acorde.

[3] http://www.phy.mtu.edu/~suits/notefreqs.html

Nota	Semitonos que dista de LA	Frecuencia (Hz)	Relación de frecuencias aproximada (Hz/440)
LA	0	440,00	1
DO#	4	554,37	1,25
MI	7	659,26	1,50
LA	12	880,00	2

B No hay una explicación de cómo se determinan estos valores.

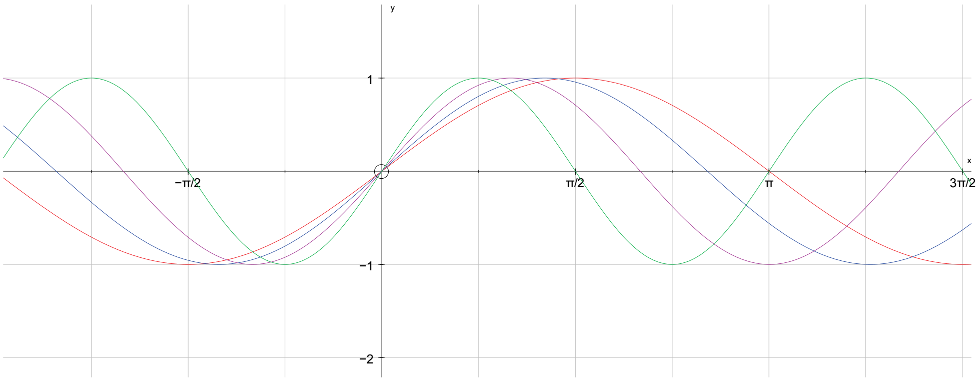
B Los gráficos no tienen relación con las tablas.

En este acorde parece que las razones entre las frecuencias están cuidadosamente espaciadas, siendo el tercer hueco del acorde igual a la suma de los otros dos huecos del acorde. La razón entre los huecos es 1:1:2. Esto podría sugerir el inicio de un patrón. También podría ser que el tercer hueco fuese el doble de grande que el primero o que el segundo. Voy a pasar a analizar distintos acordes para ver si esta conjetura sigue siendo válida. Los huecos que hay entre una razón y otra no están directamente relacionados con la diferencia de semitonos, puesto que los semitonos no tienen las mismas frecuencias: la frecuencia de los semitonos diverge a medida que va aumentando la frecuencia y las notas van adquiriendo un tono más elevado.

C El alumno creó su propio método para buscar los patrones en el acorde.

2. El acorde menor

Los acordes menores también se considera que están en armonía. He utilizado de nuevo un acorde de LA y he creado un modelo matemático para representar un acorde menor y poder así analizar sus características. Estas ondas tienen un aspecto muy similar a las ondas del acorde mayor puesto que únicamente ha cambiado una nota: el DO# ha bajado un semitono. Por lo tanto, las curvas resultantes son muy similares a las anteriores. El gráfico correspondiente al acorde menor tiene este aspecto:



E Se usan gráficos trigonométricos, pero no se hace nada con ellos. Comprensión limitada de las notas que se tocan juntas.

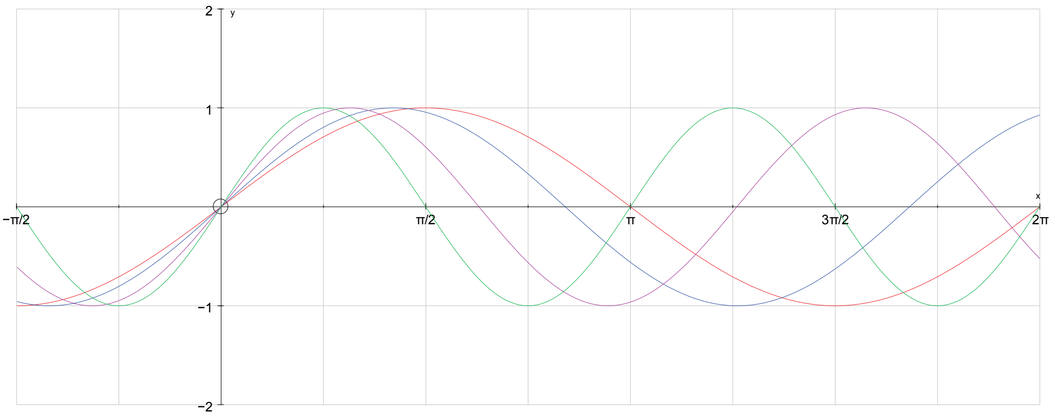
Ecuación 1: y = sen(x)
Ecuación 2: y = sen(523,25/440 x)
Ecuación 3: y = sen(659,26/440 x)
Ecuación 4: y=sen(2x)

Este gráfico es muy similar al del acorde mayor aunque los valores reales, que se muestran en la siguiente tabla, son ligeramente distintos.

Nota	Semitonos que dista de LA	Frecuencia (Hz)	Razón de frecuencias aproximada (Hz/440)
LA	0	440,00	1
DO	3	523,25	1,20
MI	7	659,26	1,50
LA	12	880,00	2

De nuevo, dado que el MI que hay en medio del acorde no se ha movido, la suma de los primeros dos huecos del acorde es igual al tercer hueco. La razón entre los huecos es ahora 2:3:5. Sin embargo, para poner a prueba esta teoría de manera apropiada, tenemos que analizar acordes que difieran más drásticamente del acorde mayor original.

3. El acorde mayor en primera inversión



El acorde en inversión es el mismo que el acorde mayor, salvo que las notas están colocadas en un orden ligeramente distinto. La primera inversión de un acorde que comience en LA realmente estará en la nota FA mayor. El gráfico correspondiente a dicho acorde tiene este aspecto:

Ecuación 1: y = sen(x)
Ecuación 2: y = sen(523,25/440 x)
Ecuación 3: y = sen(698,46/440 x)
Ecuación 4: y=sen(2x)

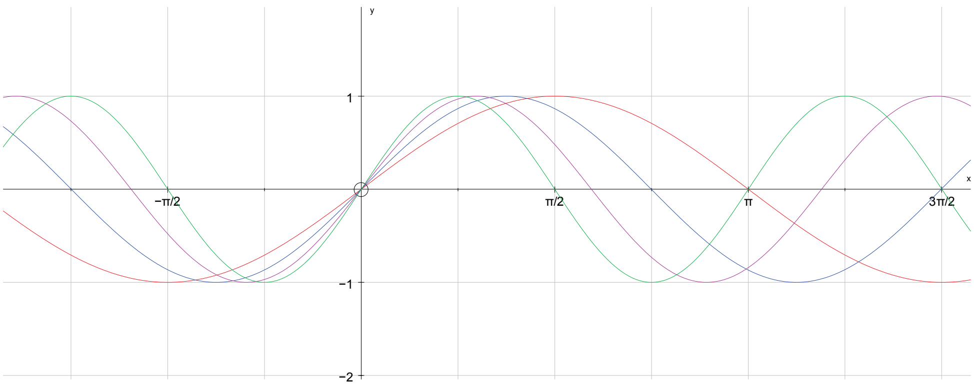
Valor incorrecto (698,46) en comparación con la tabla.

Nota	Semitonos que dista de LA	Frecuencia (Hz)	Relación de frecuencias aproximada (Hz/440)
LA	0	440,00	1
DO	3	523,25	1,20
FA	8	659,26	1,60
LA	12	880,00	2

La tabla de valores correspondiente a este acorde muestra que mi conjetura original no es válida para todos los acordes. Sin embargo, los huecos todavía mantienen una cuidada relación 1:2:2.

4. El acorde mayor en segunda inversión

Este acorde, como la primera inversión, es otra reorganización diferente de las notas del acorde mayor.



Ecuación 1: y = sen(x)
Ecuación 2: y = sen(587,33/440 x)
Ecuación 3: y = sen(739,99/440 x)
Ecuación 4: y=sen(2x)

A *Repetición del mismo trabajo.*

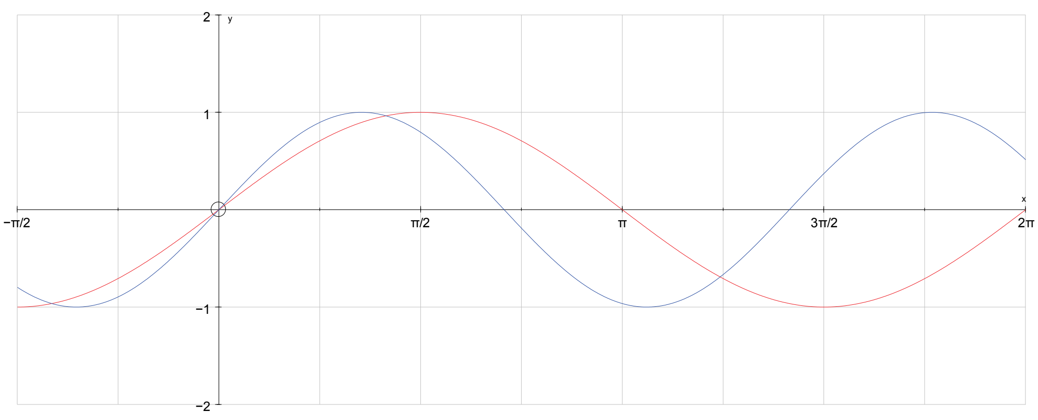
Nota	Semitonos que dista de LA	Frecuencia (Hz)	Relación de frecuencias aproximada (Hz/440)
LA	0	440,00	1
RE	5	587,33	1,33
FA#	9	739,99	1,67
LA	12	880,00	2

Resulta interesante observar que en este acorde las frecuencias de las notas están equiespaciadas, puesto que la razón entre los huecos del acorde es 1:1:1.

Voy a analizar ahora algunas notas discordantes, para ver en qué se diferencian de los acordes que acabo de estudiar.

5. El acorde de cuarta aumentada

Este acorde también es conocido como «el acorde del Diablo», puesto que está considerado como el acorde con el sonido más desagradable que hay en toda la música. Como consta solo de 2 notas, no se puede emplear exactamente el mismo modelo matemático que utilizamos anteriormente, pero aun así se puede representar gráficamente:



Ecuación 1: y = sen(x)
Ecuación 2: y = sen(622,25/440 x)

Nota	Semitonos que dista de LA	Frecuencia (Hz)	Relación de frecuencias aproximada (Hz/440)
LA	0	440,00	1
RE#	6	622,25	1,41

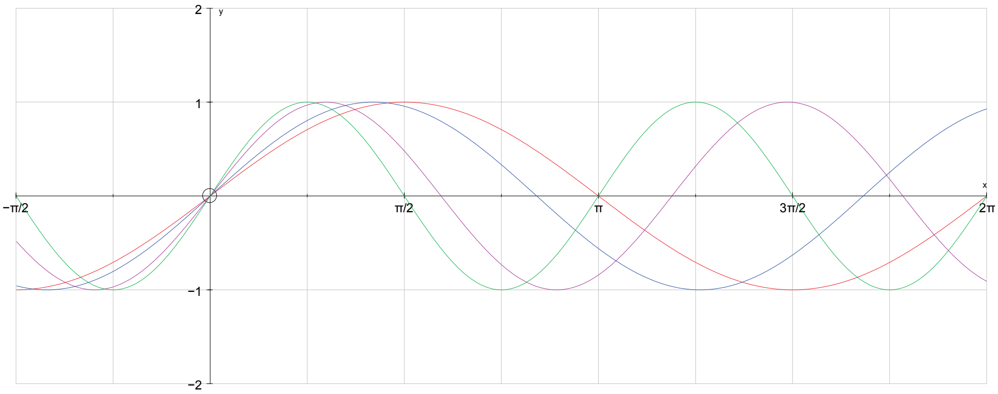
B *Uso pobre de la terminología.*

En este acorde la relación de frecuencias no es tan precisa como en los otros acordes. Sin embargo, no existe necesariamente una diferencia entre los acordes que están en armonía y los acordes discordantes. Este acorde no se puede comparar directamente con los otros acordes porque no consta de 3 notas, como los otros.

D *Cierta reflexión.*

6. El acorde de sexta aumentada

Voy a pasar a analizar ahora el acorde de sexta aumentada, que es otro acorde discordante. Este acorde sí que consta de 3 notas, por lo que se puede comparar más fácilmente con los otros acordes que he analizado. Al acorde de sexta aumentada también se le conoce como acorde de séptima dominante, y fue uno de los primeros acordes discordantes que se utilizaron en la música occidental.



Ecuación 1: $y = \text{sen}(x)$
Ecuación 2: $y = \text{sen}(523{,}25/440\ x)$
Ecuación 3: $y = \text{sen}(739{,}99/440\ x)$
Ecuación 4: $y=\text{sen}(2x)$

Nota	Semitonos que dista de LA	Frecuencia (Hz)	Relación de frecuencias aproximada (Hz/440)
LA	0	440,00	1
DO	3	523,25	1,2
FA#	9	739,99	1,67
LA	12	880,00	2

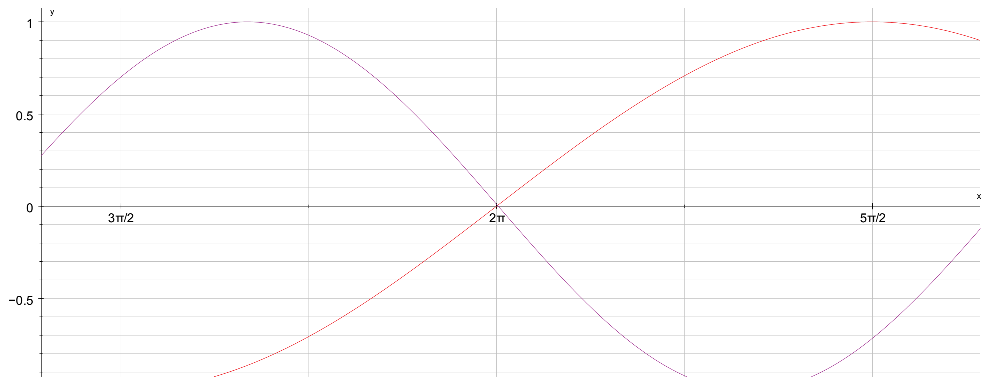
En este acorde no resulta tan fácil establecer una relación entre los huecos que hay entre razones de frecuencias. Esto sugiere que los conjuntos de notas discordantes no son tan naturales como aquellos conjuntos que suenan de manera armónica.

D Reflexión acerca de los resultados.

«Intervalos perfectos»

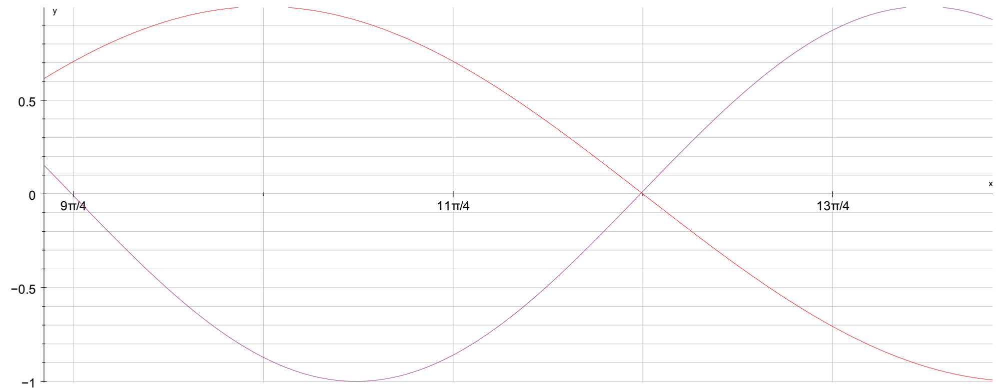
Los intervalos denominados «cuarto perfecto» y «quinto perfecto» son considerados, como el propio nombre sugiere, como los intervalos más armónicos. Resulta interesante observar en los gráficos de estos intervalos que las notas del cuarto perfecto se cruzan precisamente en 3π, mientras que las notas del quinto perfecto se cruzan en 2π.

El gráfico de un cuarto perfecto es:



Ecuación 1: $y = \text{sen}(x)$
Ecuación 2: $y = \text{sen}(587{,}33/440\ x)$

El gráfico de un quinto perfecto es:



Ecuación 1: y = sen(x)
Ecuación 2: y = sen(659,26/440 x)

A y D *Falta explicación y se pierde la oportunidad de realizar una reflexión acerca de cómo se relacionan los resultados con las conjeturas.*

Conclusión

Las pruebas sugieren que las notas que tradicionalmente se considera que están «en armonía» están, desde un punto de vista matemático, más «ordenadas» que aquellas que no están en armonía. La naturaleza matemática de las notas que están en armonía tradicional sugiere que a nuestro cerebro le resultan más agradables unas ondas de sonido que otras dependiendo de la forma en la que encajen o se acoplen las distintas notas unas con otras. Las razones entre las distintas frecuencias incluidas en un acorde armónico son más concisas que las que existen en conjuntos de notas discordantes. Las ondas de sonido que producen los osciladores tienen la misma forma que las notas generadas por los instrumentos mecánicos, por lo que la misma nota al final le suena igual (o muy similar) a nuestro oído. Por esta razón esta teoría no sólo se aplica al sonido proveniente de instrumentos electrónicos, sino que se puede aplicar a cualquier tipo de instrumento.

B *Nuevamente, uso pobre de la terminología.*

Evaluación

Así pues, está claro que las relaciones matemáticas que existen entre las notas incluidas en los acordes que están en armonía son distintas de las que existen entre las notas que conforman los acordes discordantes. Esto significa que quizás la música del futuro se pueda crear de modo completamente matemático. Puede que las matemáticas puedan ayudar a determinar qué acordes y qué secuencias de acordes sonarán mejor juntos y resultarán más agradables al oído.

Esta investigación ha sido muy limitada, puesto que no pude investigar en detalle cómo funcionan los instrumentos electrónicos y en qué se diferencian de los instrumentos mecánicos. También me habría gustado tratar de encontrar una fórmula matemática que relacionase el número de semitonos con las razones entre las frecuencias. Las pruebas aquí presentadas sugieren que las notas en armonía se ajustan bien a un contexto matemático, mientras que las notas discordantes no se ajustan. Sin embargo, esto es únicamente una teoría que habrá que contrastar más detenidamente. Para ampliar esta investigación me gustaría estudiar el área que hay entre las ondas y relacionarla con la diferencia de semitonos que hay entre las notas y las razones entre las frecuencias.

D *Reflexión superficial.*

Bibliografía

SUITS, Bryan H. “*Frequencies of musical notes”* [*Las frecuencias de las notas musicales*] [en línea] <http://www.phy.mtu.edu/~suits/notefreqs.html> [Consulta: 23 de junio de 2010]

“*Wikipedia: Synthesiser”[Sintetizador]*. [en línea] <http://en.wikipedia.org/wiki/Synthesizer> [Consulta: 23 de junio de 2010]